

## Література

1. Мальцев В.Ф. Определение распорных усилий на дисках шкивов клиноременных передач / П.А. Ковалев, А.Г. Аванесьянц // сб. «Детали машин», Техника. – 1974. - № 19 – С 46 - 52.
2. Пронин Б. А. Бесступенчатые клиноременные и фрикционные передачи / Б. Пронин, Г. Ревков. – М.: Машиностроение, 1980. – 320 с.
3. Мальцев В.Ф. Определение распорных усилий клиноременных вариаторов со стандартными ремнями / В. Мальцев, Г. Остапенко // В кн. Передаточные механизмы, М. Машиностроение. – 1966. –С 17 – 23.

Рецензія/Peer review : 12.11.2015 р.

Надрукована/Printed : 4.12.2015 р.  
Рецензент: д.т.н., проф. Гапонюк О.И.

УДК 621.01

В.О. ХАРЖЕВСЬКИЙ  
Хмельницький національний університет**МЕТОДИКА ПЕРЕВІРКИ НАЯВНОСТІ ДОТИКУ 5-ГО ПОРЯДКУ У СИНТЕЗІ  
ВАЖІЛЬНИХ КРУГОВИХ НАПРЯМНИХ МЕХАНІЗМІВ**

*В роботі розглядається питання синтезу важільних кругових напрямних механізмів з використанням методів кінематичної геометрії, що полягають у пошуку кратних вузлів інтерполяції у шатунній площині, які відповідають певному порядку дотику шатунної кривої до дуги кола. Для шарнірного чотириланкового механізму максимально можливим порядком дотику є п'ятий, що відповідає наявності шестикратного вузла інтерполяції і дозволяє отримати ділянки наближення значної тривалості та точності. Розглядається метод, що дозволяє перевірити умови наявності дотику 5-го порядку для шатунних точок механізму.*

*Ключові слова: важільні механізми, кругові напрямні механізми, синтез, дотик 5-го порядку, шестикратні вузли інтерполяції.*

V.O. KHARZHEVSKYI  
Khmelnitskyi National University**METHOD OF THE VERIFICATION OF THE 5<sup>TH</sup> ORDER TANGENCY EXISTENCE FOR THE SYNTHESIS OF  
CIRCULAR PATH GENERATING LINKAGE MECHANISMS**

*Abstract – The article is dedicated to the synthesis of the path generating linkage mechanisms which coupler points trace coupler curves with the approximation of the defined parts to the arc of the circle. These mechanisms have wide application in modern machine building. To design such mechanisms methods of the kinematic geometry of the six infinitesimally close positions can be used. To solve this task, sixfold interpolation nodes of the coupler plane can be used to provide tangency of the 5<sup>th</sup> order between the coupler curve and approximation arc in these points. It means that coupler curve and the approximation arc not only intersect in these points, but also have five equal derivatives. To verify such case existence for the four-bar linkage, the corresponding method was developed and presented in the paper.*

*Keywords: linkages, circular path generating mechanisms, synthesis, tangency of the 5<sup>th</sup> order, sixfold interpolation nodes.*

Для забезпечення переміщення виконавчих органів машин за заданою траєкторією можуть використовуватись, як відомо, важільні напрямні механізми. Крім того, на основі цих механізмів можна проектувати механізми із зупинкою вихідної ланки. Використання важільних механізмів у сучасних машинах має ряд суттєвих переваг, зокрема відсутність вищих кінематичних пар, що забезпечує більшу надійність та довговічність, наявність геометричного замикання ланок, більша навантажувальна здатність тощо. Проте більш широке впровадження таких механізмів на практиці обмежується їх досить складним синтезом. Як відомо, для цього можна використати методи найкращого наближення за Чебишевим, що отримали розвиток в роботах Блоха, Кіницького [2], Саркісяна [7], Гассманна [5], а також теоретичні положення кінематичної геометрії, започатковані Бурместером. Ідеї Бурместера знайшли розвиток в роботах вчених німецької школи синтезу, зокрема Бейера, Ліхтенхельдта, Мюллера та інших. Крім того, існує ряд сучасних робіт, присвячених розвитку цього напрямку, зокрема роботи, Уанга [9], Іна, Хана [8], МакКарті [6], а також багато інших. Основною ідеєю у синтезі напрямних механізмів методами кінематичної геометрії є пошук у шатунній площині механізму кратних вузлів інтерполяції, що характеризуються тим, що в даних точках збігаються не тільки шатунна крива та замінювальна функція, але й їх похідні до порядку  $n$  включно: в такому випадку спостерігається порядок дотику двох кривих кратності  $n$ .

Шатунна крива шарнірного чотириланкового механізму є алгебраїчною трициркулярною кривою 6-го порядку, максимальна кількість її точок перетину з дугою кола дорівнює шести. У випадку, коли всі шість точок збігаються в одну, така точка буде шестикратним вузлом інтерполяції, що характеризується рівністю перших п'яти похідних функцій шатунної кривої та дуги кола в даній точці. Це забезпечить наявність в деякому околі від такої точки ділянки приблизно постійної кривизни, а отже механізм, синтезований на базі такої точки, буде круговим напрямним механізмом з високою точністю наближення, оскільки в такому випадку для синтезу використовується вузол інтерполяції, що має максимально можливу

кратність для шатунної кривої несиметричного шарнірного чотириланкового механізму.

Метою даної роботи є розробка методу для визначення наявності дотику 5-го порядку при проведенні синтезу кругових напрямних механізмів, тобто перевірки умови існування шестикратних вузлів інтерполяції (точок Бурместера 5-го порядку) в певних положеннях шатунної площини механізму.

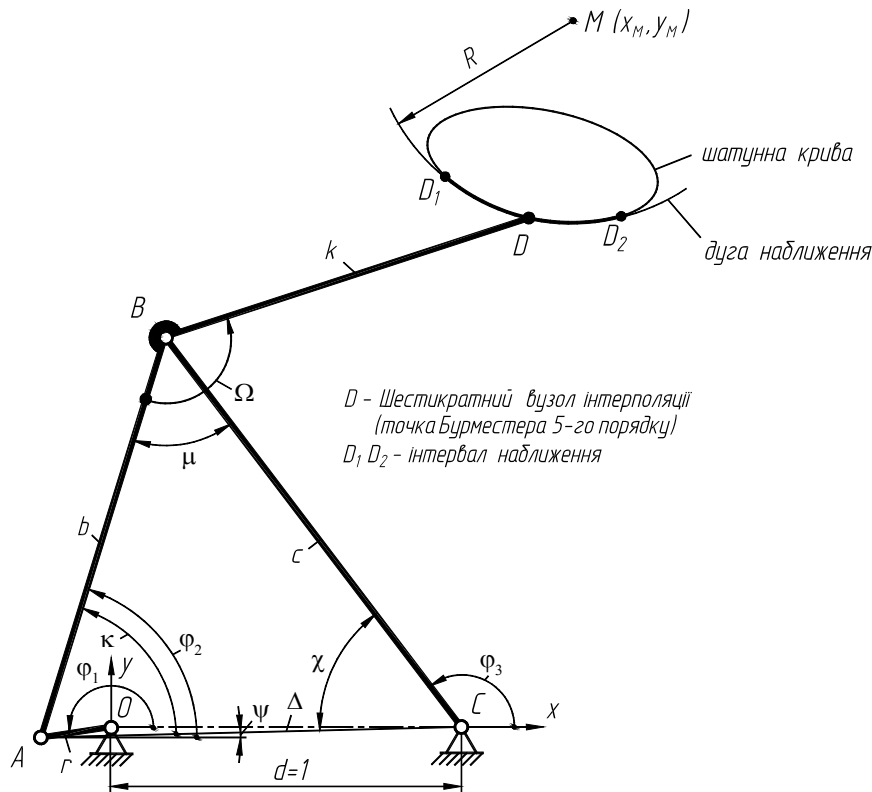


Рис. 1. Важливий круговий напрямний механізм та шестикратний вузол інтерполяції його шатунної площини (точка Бурместера 5-го порядку)

На рис. 1 зображено шарнірний чотириланковий механізм, точка  $D$  якого описує деяку шатунну криву, форма якої буде залежати від параметрів базового механізму, а саме: довжин ланок кривошипа  $r = l_{OA}$ , шатуна  $b = l_{AB}$ , коромисла  $c = l_{BC}$ , а також від положення шатунної точки  $D$ , що визначається величиною  $k = l_{BD}$  та відповідно кутом злому шатуна  $\Omega$ . При проведенні розрахунків, відповідно до рекомендацій [1], приймаємо відстань між осями нерухомих шарнірів  $d = l_{OC}$  сталою і рівною одиниці, оскільки отримати механізми з іншими величинами міжосьової відстані завжди можна за допомогою зміни інших параметрів кінематичної схеми. При дослідженні механізмів рух точки у нерухомій системі координат  $xOy$  будемо представляти у параметричній формі:

$$x_D = x_D(\varphi_1); y_D = y_D(\varphi_1), \tag{1}$$

де  $\varphi_1$  – параметр (узагальнена координата), що в даному випадку є кутом повороту кривошипа (змінюється в межах від 0 до  $2\pi$ ). Відповідно до загальних умов дотику плоских кривих, для того, щоби така крива забезпечувала в деякій точці траєкторії дотик не нижче 3-го порядку зі своїм колом кривизни, повинна забезпечуватись наступна умова [1]:

$$N_3 = (x_D'^2 + y_D'^2)(x_D'''y_D' - x_D'y_D''') + 3(x_D''x_D' + y_D''y_D')(x_D'y_D'' - x_D''y_D') = 0; \tag{2}$$

Продиференціювавши двічі рівняння (2), отримаємо умови наявності в даній точці дотик відповідно 4- та 5-го порядків кривої з колом кривизни, тобто в такій точці збігаються відповідно п'ять та шість нескінченно близьких точки траєкторії кривої та кола кривизни [1]:

$$N_4 = (x_D'^2 + y_D'^2)(x_D''y_D' - x_D'y_D'') + [4(x_D''x_D' + y_D''y_D') + 3(x_D'' + y_D'')](x_D'y_D'' - x_D''y_D') = 0; \tag{3}$$

$$N_5 = (x_D'^2 + y_D'^2)(x_D^IV y_D' - x_D'y_D^IV) + [5(x_D''x_D' + y_D''y_D') + 10(x_D''x_D'' + y_D''y_D'')](x_D'y_D'' - x_D''y_D') = 0. \tag{4}$$

Таким чином, необхідною та достатньою умовою наявності дотику 5-го порядку шатунної кривої зі своїм колом кривизни в даній точці є одночасне виконання умов (2)–(4), тобто  $N_3 = N_4 = N_5 = 0$ .

Для визначення величин, що входять у формули (2)–(4), необхідно провести кінематичне дослідження механізму (рис. 1), яке будемо проводити відповідно до [3]. Визначимо координати точки  $A$  кривошипа:

$$x_A = r \cos \varphi_1; y_A = r \sin \varphi_1; \quad (5)$$

Величина кутів  $\varphi_2$  та  $\varphi_3$ , що визначають положення шатуна  $b$  та коромисла  $c$  механізму:

$$\varphi_2 = \psi + \kappa; \varphi_3 = \psi - \chi + \pi, \text{ де } \chi = \pi - \kappa - \mu; \psi = \arctg \left[ \frac{y_A}{(x_A - 1)} \right]. \quad (6)$$

Для розрахунку шуканих кутів за формулами (6), додатково визначаємо наступні величини:

$$\mu = \arccos \left( \frac{b^2 + c^2 - \Delta^2}{2bc} \right); \kappa = \arccos \left( \frac{b^2 + \Delta^2 - c^2}{2b\Delta} \right); \Delta = \sqrt{(1 - x_A^2) + y_A^2}. \quad (7)$$

Координати точки  $B$  механізму визначаємо наступним чином:

$$x_B = x_A + b \cos \varphi_2; y_B = y_A + b \sin \varphi_2. \quad (8)$$

Параметри шатунної точки  $D$  визначаємо за аналогічними формулами (як додаткову точку шатуна):

$$x_D = x_B + k \cos(\varphi_2 + \Omega - \pi); y_D = y_B + k \sin(\varphi_2 + \Omega - \pi). \quad (9)$$

Як видно з формул (2)-(4), для визначення шуканих величин необхідно розрахувати значення перших п'яти похідних від переміщень шатунної точки  $D$ . Формули для розрахунку перших чотирьох похідних від переміщень шатунної точки, а саме  $x'_D, y'_D, x''_D, y''_D, x'''_D, y'''_D, x^{IV}_D, y^{IV}_D$  розглядалися нами у роботі [4]. Розглянемо визначення п'ятих похідних від переміщення точки  $D$  механізму. Для цього спочатку визначимо п'ять похідні від координат кривошипа  $x_A, y_A$ :

$$x'_A = -r \sin \varphi_1; y'_A = r \cos \varphi_1. \quad (10)$$

П'ять похідні від переміщень точки  $B$  механізму:

$$\left. \begin{aligned} x'_B &= x'_A + b \sin \varphi_2 (10\varphi_2'' \varphi_2'^2 - \varphi_2'^5 + 15\varphi_2' \varphi_2''^2 - \varphi_2'^V) - b \cos \varphi_2 (5\varphi_2^{IV} \varphi_2' - 10\varphi_2'' \varphi_2'^3 + 10\varphi_2'' \varphi_2'''); \\ y'_B &= y'_A - b \cos \varphi_2 (10\varphi_2'' \varphi_2'^2 - \varphi_2'^5 + 15\varphi_2' \varphi_2''^2 - \varphi_2'^V) - 5b \sin \varphi_2 (\varphi_2^{IV} \varphi_2' - 2\varphi_2'' \varphi_2'^3 + 2\varphi_2'' \varphi_2'''). \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Перші чотири похідні від кутів  $\varphi_2$  та  $\varphi_3$ , які визначають положення відповідно шатуна  $b$  та коромисла  $c$  механізму, а саме величини  $\varphi'_2, \varphi''_2, \varphi'''_2, \varphi^{IV}_2, \varphi'_3, \varphi''_3, \varphi'''_3, \varphi^{IV}_3$  наведені у роботі [4].

Відповідно, до [4], при розрахунку других похідних зазначених функцій, проводилась розбивка функції на простіші дроби та вводились наступні позначення:

$$\varphi''_2 = A + B - C + D; \varphi''_3 = F_1 + F_2 + F_3 - F_4, \quad (12)$$

де заміновальні коефіцієнти визначались таким чином:

$$A = \frac{x''_A \cos \varphi_3}{b \sin(\varphi_2 - \varphi_3)}; B = A \operatorname{tg} \varphi_3 \operatorname{tg} \varphi_1; C = \operatorname{ctg}(\varphi_2 - \varphi_3) \varphi_2'^2; D = \frac{c \varphi_3'^2}{b \sin(\varphi_2 - \varphi_3)}; \quad (13)$$

$$F_1 = \frac{b \cos \varphi_2}{c \cos \varphi_3} A; F_2 = \frac{B}{A} \operatorname{ctg} \varphi_3 \operatorname{tg} \varphi_2 F_1; F_3 = \left( \frac{\varphi_3'}{\varphi_2'} \right)^2 C; F_4 = D \left( \frac{b \varphi_2'}{c \varphi_3'} \right)^2; \quad (14)$$

Значення п'ятої похідної  $\varphi_2^V$ , що входить у рівняння (11):

$$\varphi_2^V = A''' + B''' - C''' + D'''. \quad (15)$$

Величини, що входять у формулу (15), визначаються наступним чином:

$$A''' = A_1'' + A_2'' + A_3''; B''' = B_1'' + B_2'' + B_3''; C''' = C_1'' - C_2'' - C_3''; D''' = D_1'' + D_2''; \quad (16)$$

Коефіцієнти  $A_1'', A_2'', A_3''$ , необхідні для визначення величини  $A'''$ , розраховуються за такими формулами:

$$A_1'' = \frac{-A'' \sin 2\varphi_1 - 4(A' + A \operatorname{tg} \varphi_1)}{2 \cos^2 \varphi_1}; \quad (17)$$

$$A_2'' = -\operatorname{tg} \varphi_3 (A'' \varphi_3' + 2A' \varphi_3'' + A \varphi_3''') - \frac{A \varphi_3' (2\varphi_3'^2 \operatorname{tg} \varphi_3 + 3\varphi_3'') + 2A' \varphi_3'^2}{\cos^2 \varphi_3}; \quad (18)$$

$$\begin{aligned} A_3'' &= \frac{A' A_3'}{A} - [A(\varphi_2''' - \varphi_3''') - A'(\varphi_2'' - \varphi_3'')] \operatorname{ctg}(\varphi_2 - \varphi_3) + \\ &+ \frac{A_3}{A^2} \left[ A'' A - A'^2 + \frac{2A_3' A - A_3 A'}{\cos^2(\varphi_2 - \varphi_3)} \right] + \left[ \frac{A(\varphi_2'' - \varphi_3'')}{\sin^2(\varphi_2 - \varphi_3)} + \frac{2A_3^2 \sin(\varphi_2 - \varphi_3)}{A \cos^3(\varphi_2 - \varphi_3)} \right] (\varphi_2' - \varphi_3'); \end{aligned} \quad (19)$$

Коефіцієнти  $B_1'', B_2'', B_3''$ , що входять у формулу (16) для визначення величини  $B'''$ :

$$B_1'' = \frac{A'B'' + 2A''B' + A'''B}{A} - \frac{2B'A'^2 + 3A'A''B}{A^2} + \frac{2A'^3B}{A^3}; \quad (20)$$

$$B_2'' = \frac{2B'' - 4B' \operatorname{ctg} 2\varphi_1 - \frac{4 \cos \varphi_2 (B' - 2B \operatorname{ctg} 2\varphi_2)}{\sin^2 2\varphi_1} + \frac{8B}{\sin^3 2\varphi_1}}{\sin 2\varphi_1}; \quad (21)$$

$$B_3'' = \frac{2(B''\varphi_3' + B\varphi_3'') + 4B'\varphi_3'' - \frac{4\varphi_3'(2B'\varphi_3' + 3B\varphi_3'')(2 \cos^2 \varphi_3 - 1)}{\sin^2 2\varphi_3} + \frac{4B\varphi_3'^3 (\cos 4\varphi_3 + 3)}{\sin^3 2\varphi_3}}{\sin 2\varphi_3}; \quad (22)$$

Для визначення величини  $C'''$ , що розраховується за (16), розраховуються наступні коефіцієнти:

$$C_1'' = C_1 \left[ \frac{\varphi_2^{IV}}{\varphi_2'} + \frac{C''}{C} - \left( \frac{\varphi_2''}{\varphi_2'} \right)^2 - \left( \frac{C'}{C} \right)^2 \right] + C_1' \left( \frac{\varphi_2''}{\varphi_2'} + \frac{C'}{C} \right) - \frac{2C'\varphi_2''^2 + 4C\varphi_2''\varphi_2'''}{\varphi_2'^2} + 4C \left( \frac{\varphi_2''}{\varphi_2'} \right)^3; \quad (23)$$

$$C_2'' = C_2 \left[ \frac{C''C - C'^2}{C^2} + \frac{\varphi_2'' - \varphi_3''}{\varphi_2' - \varphi_3'} - \left( \frac{\varphi_2'' - \varphi_3''}{\varphi_2' - \varphi_3'} \right)^2 \right] + C_2' \left( \frac{C'}{C} + \frac{\varphi_2'' - \varphi_3''}{\varphi_2' - \varphi_3'} \right) + \frac{(\varphi_2' - \varphi_3')^2 (2C_2 - C') - 2C(\varphi_2' - \varphi_3')(\varphi_2'' - \varphi_3'')}{\sin^2 (\varphi_2 - \varphi_3)}; \quad (24)$$

$$C_3'' = \frac{2(C_3'\varphi_2'' + C_3\varphi_2''')}{\varphi_2'} - \frac{2C_3\varphi_2''^2}{\varphi_2'^2} + \varphi_2'^2 (\varphi_2'' - \varphi_3'') + 2\varphi_2'\varphi_2'' (\varphi_2'' - \varphi_3''); \quad (25)$$

Величини, що входять у формулу (16) для визначення коефіцієнта  $D'''$ , розраховуються за формулами:

$$D_1'' = \frac{2(D''\varphi_3' + D\varphi_3'' + 2D'\varphi_3''')}{\varphi_3'} - \frac{2\varphi_3''(D'\varphi_3' + D\varphi_3''')}{\varphi_3'^2} + \frac{D_1^2 D' - 2D_1 D_1' D}{2D^2}; \quad (26)$$

$$D_2'' = D_2 \left[ \frac{D''}{D} + \frac{\varphi_2'' - \varphi_3''}{\varphi_2' - \varphi_3'} - \left( \frac{D'}{D} \right)^2 - \left( \frac{\varphi_2'' - \varphi_3''}{\varphi_2' - \varphi_3'} \right)^2 \right] + D_2' \left( \frac{D'}{D} + \frac{\varphi_2'' - \varphi_3''}{\varphi_2' - \varphi_3'} \right) + \frac{(D' + 2D_2)(\varphi_2' - \varphi_3')^2 + 2D(\varphi_2' - \varphi_3')(\varphi_2'' - \varphi_3'')}{\sin^2 (\varphi_2 - \varphi_3)}; \quad (27)$$

Таким чином, всі величини, необхідні для визначення п'ятої похідної  $\varphi_3^V$ , визначаються за наведеними вище формулами (15)–(27). Далі визначимо величину  $\varphi_3^V$  – п'яту похідну від кута, що визначає положення коромисла с механізму:

$$\varphi_3^V = F_1''' + F_2''' + F_3''' - F_4'''. \quad (28)$$

Величина  $F_1'''$ , що входять у формулу (28), визначається як

$$F_1''' = F_{11}'' - F_{12}'' + F_{13}'', \quad (29)$$

де коефіцієнти, що входять у (29), можна розрахувати наступним чином:

$$F_{11}'' = \frac{2A'^3 F_1'}{A^3} - \frac{2A'^2 F_1' + 3A'A''F_1'}{A^2} + \frac{A'F_1'' + 2A''F_1' + A'''F_1'}{A}; \quad (30)$$

$$F_{12}'' = \left[ \frac{\varphi_2''\varphi_2' - \varphi_2''^2}{\varphi_2'^2} + \frac{2\varphi_2'' - 4\varphi_2'^2 \operatorname{ctg} 2\varphi_2}{\sin 2\varphi_2} + \frac{F_1 F_1'' - F_1'^2}{F_1^2} + \left( \frac{\varphi_2''}{\varphi_2'} + \frac{2\varphi_2'}{\sin 2\varphi_2} + \frac{F_1'}{F_1} \right)^2 \right] \varphi_2' \operatorname{tg} \varphi_2 F_1'; \quad (31)$$

$$F_{13}'' = \left[ \frac{\varphi_3''\varphi_3' - \varphi_3''^2}{\varphi_3'^2} + \frac{2\varphi_3'' - 4\varphi_3'^2 \operatorname{ctg} 2\varphi_3}{\sin 2\varphi_3} + \frac{F_1 F_1'' - F_1'^2}{F_1^2} + \left( \frac{\varphi_3''}{\varphi_3'} + \frac{2\varphi_3'}{\sin 2\varphi_3} + \frac{F_1'}{F_1} \right)^2 \right] \varphi_3' \operatorname{tg} \varphi_3 F_1'; \quad (32)$$

Величина  $F_2'''$ , що входять у формулу (28), визначається як

$$F_2''' = F_{21}'' + F_{22}'' - F_{23}'' + F_{24}'' - F_{25}'', \quad (33)$$

де коефіцієнти, що входять у (33), можна розрахувати наступним чином:

$$F_{21}'' = \frac{2F_2' F_1'^3}{F_1^3} - \frac{2F_2' F_1'^2 + 3F_2 F_1' F_1''}{F_1^2} + \frac{F_2 F_1'' + F_1' F_2'' + 2F_2' F_1''}{F_1}; \quad (34)$$

$$F_{22}'' = \frac{2B'^3 F_2}{B^3} - \frac{2B'^2 F_2' + 3B'B'' F_2}{B^2} + \frac{B'F_2'' + 2B''F_2' + B'''F_2}{B}; \quad (35)$$

$$F_{23}'' = \frac{2A'^3 F_2}{A^3} - \frac{2A'^2 F_2' + 3A'A'' F_2}{A^2} + \frac{A'F_2'' + 2A''F_2' + A'''F_2}{A}; \quad (36)$$

$$F_{24}'' = \frac{2\varphi_2' F_2}{\sin 2\varphi_2} \left[ \frac{4\varphi_2'^2 - \varphi_2'' \sin 4\varphi_2}{\sin^2 2\varphi_2} + \frac{\varphi_2''' \varphi_2' - \varphi_2''^2}{\varphi_2'^2} + \frac{F_2'' F_2 - F_2'^2}{F_2^2} + \left( \frac{F_2'}{F_2} + \frac{\varphi_2''}{\varphi_2'} - 2\varphi_2' \operatorname{ctg} 2\varphi_2 \right)^2 \right]; \quad (37)$$

$$F_{25}'' = \frac{2\varphi_3' F_2}{\sin 2\varphi_3} \left[ \frac{4\varphi_3'^2 - \varphi_3'' \sin 4\varphi_3}{\sin^2 2\varphi_3} + \frac{\varphi_3''' \varphi_3' - \varphi_3''^2}{\varphi_3'^2} + \frac{F_2'' F_2 - F_2'^2}{F_2^2} + \left( \frac{F_2'}{F_2} + \frac{\varphi_3''}{\varphi_3'} - 2\varphi_3' \operatorname{ctg} 2\varphi_3 \right)^2 \right]. \quad (38)$$

Величина  $F_3'''$ , що входять у формулу (28), визначається як

$$F_3''' = F_{31}'' - F_{32}'' + F_{33}''; \quad (39)$$

де коефіцієнти, що входять у (39), можна розрахувати наступним чином:

$$F_{31}'' = \frac{2C'^3 F_3}{C^3} - \frac{2C'^2 F_3' + 3C'C'' F_3}{C^2} + \frac{C'F_3'' + 2C''F_3' + C'''F_3}{C}; \quad (40)$$

$$F_{32}'' = \frac{2(F_3'' \varphi_2' + 2F_3' \varphi_2'' + F_3 \varphi_2''')}{\varphi_2'} - \frac{2\varphi_2'' (2F_3' \varphi_2'' + 3F_3 \varphi_2''')}{\varphi_2'^2} + 4F_3 \left( \frac{\varphi_2''}{\varphi_2'} \right)^3; \quad (41)$$

$$F_{33}'' = \frac{2(F_3'' \varphi_3' + 2F_3' \varphi_3'' + F_3 \varphi_3''')}{\varphi_3'} - \frac{2\varphi_3'' (2F_3' \varphi_3'' + 3F_3 \varphi_3''')}{\varphi_3'^2} + 4F_3 \left( \frac{\varphi_3''}{\varphi_3'} \right)^3. \quad (42)$$

Величина  $F_4'''$ , що входять у формулу (28), визначається як

$$F_4''' = F_{41}'' - F_{42}'' + F_{43}''; \quad (43)$$

де коефіцієнти, що входять у (43), можна розрахувати наступним чином:

$$F_{41}'' = \frac{2D'^3 F_4}{D^3} - \frac{2D'^2 F_4' + 3D'D'' F_4}{D^2} + \frac{D'F_4'' + 2D''F_4' + D'''F_4}{D}; \quad (44)$$

$$F_{42}'' = \frac{2(F_4'' \varphi_3' + 2F_4' \varphi_3'' + F_4 \varphi_3''')}{\varphi_3'} - \frac{2\varphi_3'' (2F_4' \varphi_3'' + 3F_4 \varphi_3''')}{\varphi_3'^2} + \frac{4F_4 \varphi_3''^3}{\varphi_3'^3}; \quad (45)$$

$$F_{43}'' = \frac{2(F_4'' \varphi_2' + 2F_4' \varphi_2'' + F_4 \varphi_2''')}{\varphi_2'} - \frac{2\varphi_2'' (2F_4' \varphi_2'' + 3F_4 \varphi_2''')}{\varphi_2'^2} + \frac{4F_4 \varphi_2''^3}{\varphi_2'^3}; \quad (46)$$

Таким чином, всі величини, необхідні для визначення п'ятої похідної  $\varphi_3^V$ , визначаються наведеними вище формулами (28)-(46). Далі визначаємо п'яту похідну від переміщення шатунної точки  $D$  механізму:

$$\left. \begin{aligned} x_D^V &= x_B^V - k \sin(\varphi_2 + \Omega) (10\varphi_2'' \varphi_2'^2 - \varphi_2'^5 + 15\varphi_2' \varphi_2''^2 - \varphi_2^V) + 5k \cos(\varphi_2 + \Omega) (\varphi_2'' \varphi_2' - 2\varphi_2'' \varphi_2'^3 + 2\varphi_2'' \varphi_2'''); \\ x_D^V &= x_B^V + k \cos(\varphi_2 + \Omega) (10\varphi_2'' \varphi_2'^2 - \varphi_2'^5 + 15\varphi_2' \varphi_2''^2 - \varphi_2^V) + 5k \sin(\varphi_2 + \Omega) (\varphi_2'' \varphi_2' - 2\varphi_2'' \varphi_2'^3 + 2\varphi_2'' \varphi_2'''). \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

Покажемо приклад проведення розрахунків за вищевказаними формулами для механізму, зображеного на рис. 1. В якості шатунної точки  $D$  механізму прийнято шестикратний вузол інтерполяції, яким є точка Бурмєстера 5-го порядку. Параметри базового чотириланкового механізму були прийняті наступні:  $r = 0,24; b = 1,2; c = 1,4$ . Положення шатунної точки розраховано числовим способом та визначається довжиною другого плеча шатуна  $k = l_{BD} = 1,09069068952907$  та кутом його злomu  $\Omega = 125,26402568421$ . Особлива точка (шестикратний вузол інтерполяції) розрахований для положення шатунної площини визначається положенням кривошипа  $\varphi_1 = 188,628168465133^\circ$ . За наведеними параметрами механізму, результати проведених розрахунків за формулами (15), (28) та (47) показані на рис. 2. Розрахунки проведені у системі *Mathcad*.

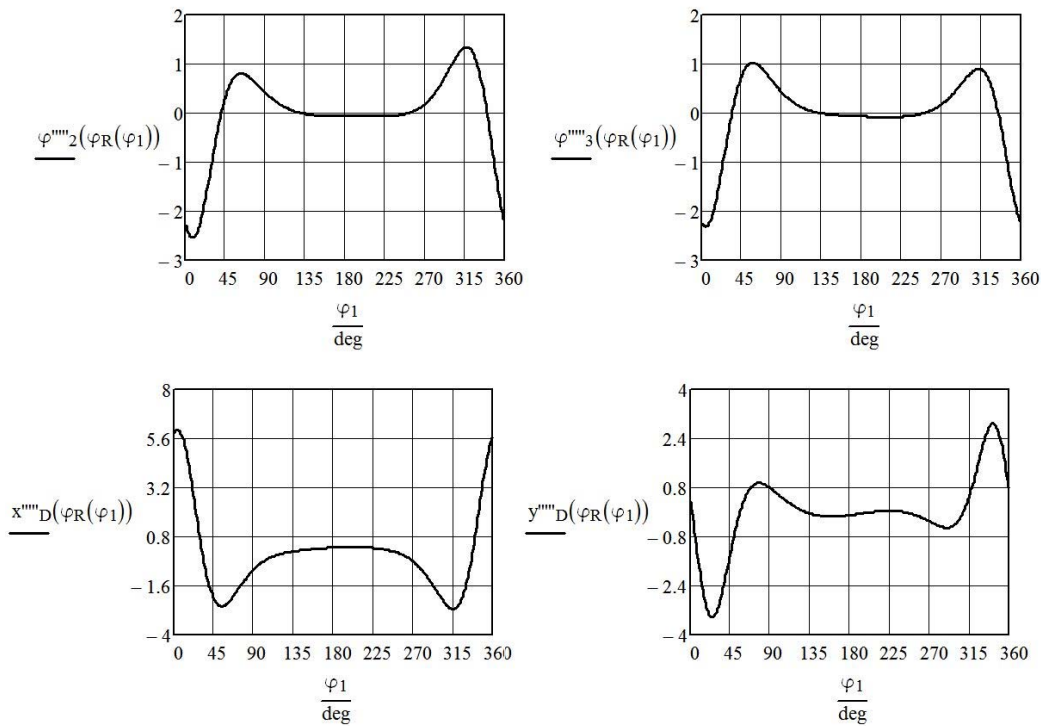


Рис. 2. Приклади результатів проведених розрахунків:  $\varphi_2^V, \varphi_3^V, x_D^V$  та  $y_D^V$ .

В процесі виведення формул (5)–(47), з метою отримання більш компактних результатів використовувались відомі формули для перетворення тригонометричних виразів. Тому, при проведенні розрахунків за цими формулами передбачено виключення з розрахунку точок, що відповідають положенням кривошипа, що кратні  $\pi/2$  (оскільки розраховані значення внаслідок проведених тригонометричних перетворень прямують до нескінченності), замість них приймалися середні значення сусідніх положень. Оскільки розрахунки проводились з досить малим кроком  $\varphi_1 = 0,1^\circ$  (для 3600 положень механізмів), така заміна є досить рівноцінною. Для цього, в якості параметра функцій замість кута повороту кривошипа  $\varphi_1$  вводиться значення  $\varphi_R$ , що враховує зазначені вище особливості. У системі *Mathcad*, це реалізовано наступною функцією:

$$\varphi_R(\varphi_1) := \begin{cases} \varphi_1 + \frac{2 \cdot \pi}{N} & \text{if } \varphi_1 = \frac{\pi}{2} \vee \varphi_1 = \frac{3\pi}{2} \vee \varphi_1 = \pi \vee \varphi_1 = 0 \\ \varphi_1 - \frac{2 \cdot \pi}{N} & \text{if } \varphi_1 = 2 \cdot \pi \\ \varphi_1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Використовуючи наведені вище формули (5)–(47), а також формули для розрахунку перших чотирьох похідних величин, що наведені у [4], можна визначити наявність дотику 5-го порядку шляхом розрахунку значень  $N_3, N_4, N_5$  за формулами (2)–(4), з метою перевірки одночасної рівності нулю цих величин в даній точці шатунної кривої. Для прикладу, що розглядався вище, отримані результати наведені на рис. 3.

Як видно з наведеного графіка, у точці, яка відповідає куту повороту кривошипа  $\varphi_1$ , що визначає положення шатунної площини механізму, спостерігається виконання умови наявності дотику 5-го порядку:  $N_3 = N_4 = N_5 = 0$  (за результатами проведених розрахунків –  $10^{-17}$ ). Це означає, що шатунна точка *D* для даного положення шатунної площини є шестикратним вузлом інтерполяції, в якому спостерігається рівність не тільки значень заданої та замінювальної функцій (шатунної кривої та кола наближення), але й їх п'яти їх перших похідних (див. рис. 1). Використання таких точок для проведення синтезу забезпечує математично найвищий порядок дотику кривих для шарнірного чотириланкового механізму та відповідно дозволяє проектувати на їх основі механізми із тривалими ділянками наближення високої точності.

Таким чином, в результаті проведених досліджень, для несиметричного шарнірного чотириланкового механізму розроблено метод, що дозволяє при проведенні синтезу кругових напрямних механізмів проводити перевірку наявності дотику найвищого 5-го порядку шатунної кривої в даній точці з її колом кривизни.

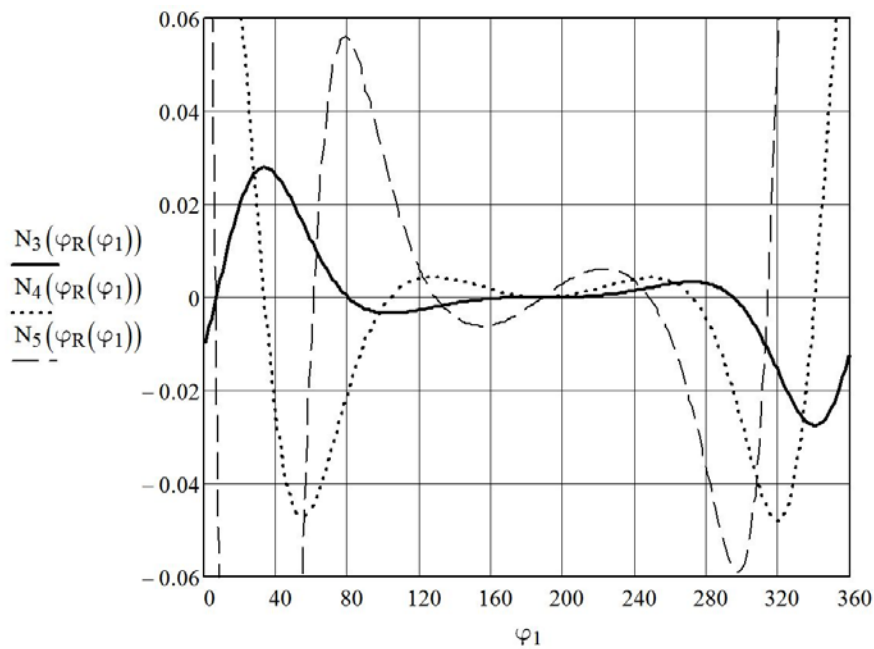


Рис. 3. Перевірка умови наявності дотику 5-го порядку на прикладі механізму, синтезованого для  $\varphi_1=188,628^\circ$ :  $N_3=N_4=N_5=0$ .

Дослідження планується продовжити в напрямку розробки методу оптимізаційного синтезу таких механізмів та побудовою меж їх існування.

### Література

1. Артоболевский И. И. Синтез плоских механизмов / И. И. Артоболевский, Н. И. Левитский, С. А. Черкудинов. – М. : Физматгиз, 1959. – 1084 с.
2. Киницкий Я.Т. Шарнирные механизмы Чебышева с выстоем выходного звена / Я. Т. Киницкий. – К. : Вища школа, 1990. – 232 с.
3. Киницкий Я.Т. Теория механизмов і машин в системі Mathcad : навч. посібник / Я.Т. Киницкий, В.О. Харжевський, М.В. Марченко. – Хмельницький : ХНУ, 2014. – 295 с.
4. Харжевський В.О. Методика визначення особливих точок Чебишева для синтезу важільних прямолінійно-напрямних механізмів / В.О. Харжевський // Вісник Хмельницького національного університету. – 2015. – № 3. – С. 34–41.
5. Gassmann V. Synthese von Geradföhungen mit ebenen Viereckgetrieben, Hamburg, Universität der Bundeswehr Diss., 2000. 102 p.
6. J. McCarthy, G. Soh, Geometric Design of Linkages, 2nd edition, Springer-Verlag, New York, 2011–448 p.
7. Sarkissyan Y.L. Approximations in Synthesis of Mechanisms. State Engineering University of Armenia Proceedings, series “Mechanics, Machine Science, Machine-building”, Issue 15, №2, 2012, pp. 9–21.
8. L. Yin, J. Han, J. Huang, T. Yang, "A General Method for Synthesizing Straight-Line Linkage with Ball and Burmester Points", Applied Mechanics and Materials, Vols 215-216, 2012, pp. 138–141.
9. Wang D., Wang W., Kinematic Differential Geometry and Saddle Synthesis of Linkages. John Wiley & Sons Singapore Pte. Ltd., 2015. 450 p.

Рецензія/Peer review : 9.11.2015 р.

Надрукована/Printed :4.12.2015 р.  
Рецензент: д.т.н., проф. Киницкий Я.Т.